Автоматика и телемеханика, № 4, 2024

Стохастические системы

© 2024 г. **В.Л. ХАЦКЕВИЧ, д-р техн. наук, профессор (vlkhats@mail.ru)**
(Военно-воздушная академия им. профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, Воронеж)

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ СТАЦИОНАРНОГО НЕЧЕТКО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

В данной работе изучены стационарные случайные процессы с нечеткими состояниями. Установлены свойства их числовых характеристик – нечетких ожиданий, ожиданий и ковариационных функций. Обосновано спектральное представление ковариационной функции – обобщенная теорема Винера–Хинчина. Основное внимание уделено задаче о преобразовании стационарного нечетко случайного процесса (сигнала) линейной динамической системой. Получены формулы, связывающие нечеткие ожидания (и ожидания) входных и выходных стационарных нечетко случайных процессов. Разработан и обоснован алгоритм вычисления ковариационной функции стационарного нечетко случайного процесса на выходе линейной динамической системы по ковариационной функции стационарного входного нечетко случайного процесса. Полученные результаты опираются на свойства нечетко случайных величин и числовых случайных процессов. В качестве примеров рассмотрены треугольные нечетко случайные процессы.

Ключевые слова: стационарные случайные процессы, нечеткие состояния, нечеткие ожидания, ковариационные функции, преобразование нечетко случайного процесса линейной динамической системой.

DOI: 10.31857/S0005231024040063, **EDN:** ZGLBSF

1. Введение

В данной работе изучаются непрерывные случайные процессы с нечеткими состояниями (нечетко случайные процессы). А именно время и множество возможных нечетких состояний считаются непрерывными. При этом сечение непрерывного нечетко случайного процесса в любой момент времени представляет собой нечетко случайную величину. В предлагаемом исследовании применяются известные результаты по нечеткому моделированию [1, 2], теории нечетко случайных величин [3–5] и классические результаты теории вещественных случайных процессов [6, 7].

Настоящая работа продолжает исследования по теории непрерывных случайных процессов с нечеткими состояниями, начатые автором в [8], в которой изучены свойства нечетких ожиданий, ожиданий и ковариационных функций непрерывных нечетко случайных процессов, а также с помощью метода функции Грина исследована задача о взаимосвязи характеристик нечетко случайных сигналов на входе и выходе линейной динамической системы.

В представленной работе введены и исследованы стационарные нечетко случайные процессы, в частности, получено спектральное представление ковариационной функции – обобщенная теорема Винера–Хинчина. На базе этой теоремы предложен и обоснован алгоритм вычисления характеристик стационарного нечетко случайного процесса (сигнала) на выходе линейной динамической системы, а именно – нечеткого ожидания, ожидания и ковариационной функции по соответствующим характеристикам входного нечетко случайного процесса (сигнала). Полученные в этой области результаты являются развитием на случай нечеткости известных [6, гл. 7; 7, гл. VII] для вещественных непрерывных случайных процессов.

Подчеркнем отличие подхода и результатов данной работы от исследований, посвященных случайным процессам с непрерывным временем и дискретными нечеткими состояниями. Например, в [9–12] обсуждаются нечеткие системы массового обслуживания, а в [13, 14] рассматриваются стохастические нечеткие динамические системы автоматического регулирования. При этом в упомянутых работах стационарные нечетко случайные процессы и их ковариационные функции не обсуждаются.

Ниже под нечетким числом $\tilde{z}$, заданным на универсальном пространстве R – вещественных чисел, понимается совокупность упорядоченных пар $(x, \mu_{\tilde{z}}(x))$, где функция принадлежности $\mu_{\tilde{z}} : R \to [0,1]$, определяет степень принадлежности $\forall\, x \in R$ множеству $\tilde{z}$ [1, гл. 5]. В данной работе используется интервальное представление нечетких чисел [1, гл. 5] При этом множество α-уровня нечеткого числа $\tilde{z}$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}}(x)$ определяется соотношением $Z_\alpha = \{x | \mu_{\tilde{z}}(x) \geqslant \alpha\}$ $(\alpha \in (0,1])$, $Z_0 = cl\{x|\mu_{\tilde{z}}(x) > 0\}$, где cl – обозначает замыкание множества.

Будем считать, что все α-уровни нечеткого числа – замкнутые и ограниченные интервалы вещественной оси. Таким образом, $Z_\alpha = [z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$, где $z^-(\alpha)$ и $z^+(\alpha)$ – левый и соответственно правый α-индексы нечеткого числа.

Ниже будем рассматривать совокупность нечетких чисел J, для которых индексы $z^\pm(\alpha)$ удовлетворяют следующим стандартным условиям:

1. $z^-(\alpha) \leqslant z^+(\alpha)$, $\forall\, \alpha \in [0,1]$.

2. Функция $z^-(\alpha)$ ограничена, не убывает, непрерывна слева на промежутке $(0,1]$ и непрерывна справа в точке 0.

3. Функция $z^+(\alpha)$ ограничена, не возрастает, непрерывна слева на промежутке $(0,1]$ и непрерывна справа в точке 0.

Под суммой нечетких чисел понимается нечеткое число, индексы которого являются суммами соответствующих индексов слагаемых. Умножение нечеткого числа на положительное число означает умножение индексов на это число. Умножение на отрицательное вещественное число означает умножение индексов на это число и перемену их местами. Равенство нечетких чисел понимается как равенство всех соответствующих α-индексов (при $\forall\, \alpha \in [0,1]$).

Вещественное число r ассоциируется с нечетким числом, левый и правый α-индексы которого при $\forall\,\alpha \in [0,1]$ совпадают с r.

2. Нечеткие ожидания, ожидания и ковариации нечетко случайных величин

Пусть (Ω, Σ, P) – вероятностное пространство, где Ω – множество элементарных событий, Σ – σ-алгебра, состоящая из подмножеств множества Ω, P – вероятностная мера. Рассмотрим отображение $\tilde{X} : \Omega \to J$. Его интервалы α-уровня $X_\alpha(\omega)$ при фиксированном $\omega \in \Omega$ определяются формулами $X_\alpha(\omega) = \{r \in R : \mu_{\tilde{X}(\omega)}(r) \geqslant \alpha\}$ $\alpha \in (0,1]$, $X_0(\omega) = cl\{\mu_{\tilde{X}(\omega)}(r) > 0\}$, где $\mu_{\tilde{X}(\omega)}(r)$ – функция принадлежности нечеткого числа $\tilde{X}(\omega)$. Интервал $X_\alpha(\omega)$ представим в виде $X_\alpha(\omega) = [X^-(\omega,\alpha), X^+(\omega,\alpha)]$. Его границы $X^-(\omega,\alpha)$, $X^+(\omega,\alpha)$ называют левым и соответственно правым α-индексами для $\tilde{X}(\omega)$.

Отображение $\tilde{X} : \Omega \to J$ называют нечетко случайной величиной (Н.С.В.) (см., напр., [3, 4]), если вещественнозначные функции $X^\pm(\omega,\alpha)$ измеримы по ω для $\forall\,\alpha \in [0,1]$. В этом случае α-индексы являются вещественными случайными величинами при $\forall\,\alpha \in [0,1]$.

В дальнейшем будем рассматривать класс $\mathcal{X}$ Н.С.В., для которых индексы $X^-(\omega,\alpha)$ и $X^+(\omega,\alpha)$ квадратично суммируемы на $\Omega \times [0,1]$. Положим

$$x^-(\alpha) = EX^-(\omega,\alpha), \qquad x^+(\alpha) = EX^+(\omega,\alpha). \tag{1}$$

Здесь и ниже символ E обозначает математическое ожидание случайной величины, т.е. для случайной величины $\xi(\omega)$ полагаем $E\xi = \int_\Omega \xi(\omega)\,dP$.

Нечеткое число с индексами, определяемыми в (1), называют нечетким ожиданием Н.С.В. $\tilde{X}$ и обозначают $M(\tilde{X})$, а его индексы – $[M(\tilde{X})]^\pm_\alpha$.

Ожидание $m(\tilde{X})$ Н.С.В. $X \in \mathcal{X}$ определяют как среднее [15] нечеткого числа $M(\tilde{X})$ с α-индексами $M^\pm(\alpha)$, задаваемыми формулой (1)

$$m(\tilde{X}) = \frac{1}{2}\int_0^1 \Big([M(\tilde{X})]^-(\alpha) + [M(\tilde{X})]^+(\alpha)\Big)\,d\alpha. \tag{2}$$

Для Н.С.В. $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ ковариацию определяют равенством [4]

$$cov(\tilde{X},\tilde{Y}) = \frac{1}{2}\int_0^1 \big(cov(X^-_\alpha, Y^-_\alpha) + cov(X^+_\alpha, Y^+_\alpha)\big)\,d\alpha, \tag{3}$$

а дисперсию $D(\tilde{X}) = cov(\tilde{X},\tilde{X})$. В (3) ковариации вещественных случайных величин $X^\pm_\alpha$ и $Y^\pm_\alpha$ задаются стандартной [16, гл. 14] формулой $cov(X^\pm_\alpha, Y^\pm_\alpha) = E(X^\pm_\alpha - E(X^\pm_\alpha))(Y^\pm_\alpha - E(Y^\pm_\alpha))$.

Свойства нечетких ожиданий, ожиданий, ковариаций и дисперсий Н.С.В. обсуждаются в [4, 5, 17, гл. 6].

3. Непрерывные случайные процессы с нечеткими состояниями

В этом и следующем пунктах будет использовано понятие предела, непрерывности и дифференцируемости вещественных случайных процессов в среднем квадратичном (с.к.). А именно, рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H}$ вещественных случайных величин ξ, определенных на вероятностном пространстве (Ω, Σ, P), обладающих конечным вторым моментом, т.е. $E\xi^2 < \infty$. Скалярное произведение и норму в $\mathcal{H}$ вводят равенствами $(\xi, \eta) = E\xi\eta$, $\|\eta\| = (\xi, \xi)^{\frac{1}{2}}$. Пусть $\xi(t)$ – вещественный случайный процесс, такой, что $\xi(t) \in \mathcal{H}$ при $\forall\, t \in [t_0, T]$. Для него понятия с.к.-непрерывности и с.к.-дифференцируемости определяются как соответствующие понятия для функций со значениями в $\mathcal{H}$ (см. [7, гл. I]).

Пусть $[t_0, T]$ – расширенный отрезок числовой оси. Непрерывным случайным процессом с нечеткими состояниями или нечетко случайным процессом (Н.С.П.) $\tilde{X}(t)$ будем называть отображение $\tilde{X} : [t_0, T] \to \mathcal{X}$, т.е. функцию $\tilde{X}(t) = \tilde{X}(\omega, t)$, значениями которой при $\forall\, t \in [t_0, T]$ являются Н.С.В. из $\mathcal{X}$.

Обозначим α-индексы Н.С.П. $\tilde{X}(\omega, t)$ через $X_\alpha^\pm(\omega, t)$. Ниже будем рассматривать класс Н.С.П., для которых вещественные функции $X_\alpha^\pm(\omega, t)$ квадратично суммируемы по совокупности переменных на $\Omega \times [0, 1] \times [t_0, T]$.

Определим нечеткое ожидание $M(\tilde{X}(t)) = M(\tilde{X}(\omega, t))$ Н.С.П. $\tilde{X}(\omega, t)$ при $\forall\, t \in [t_0, T]$ как нечеткое ожидание (1), соответствующей Н.С.В. с α-индексами, равными

$$[M(\tilde{X}(t))]_\alpha^\pm = EX_\alpha^\pm(\omega, t), \qquad (\forall\, \alpha \in [0, 1]). \tag{4}$$

Из свойств нечетких ожиданий Н.С.В. (см. [5, 18]) вытекает

Утверждение 1. Для нечетких ожиданий Н.С.П. справедливы свойства:

1. Для неслучайной функции $\tilde{z} : [t_0, T] \to J$ справедливо $M(\tilde{z}(t)) = \tilde{z}(t)$.

2. Если $\varphi : [t_0, T] \to R$ – неслучайный скалярный множитель, а $\tilde{X}(t)$ – Н.С.П., то $M(\varphi(t)\tilde{X}(t)) = \varphi(t)M(\tilde{X}(t))$.

3. Для Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ и $\tilde{Y}(t)$ справедливо равенство $M(\tilde{X}(t) + \tilde{Y}(t)) = M(\tilde{X}(t)) + M(\tilde{Y}(t))$.

Ожидание Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ при $\forall\, t \in [t_0, T]$ согласно (2) определяется формулой

$$m(\tilde{X}(t)) = \frac{1}{2}\int_0^1 \Big([M(\tilde{X}(t))]_\alpha^- + [M(\tilde{X}(t))]_\alpha^+\Big)\, d\alpha.$$

Пример 1. Пусть вещественные случайные процессы $\xi_i(\omega, t)$ $(i = 1, 2, 3;$ $\omega \in \Omega,\ t \in [t_0, T])$ квадратично суммируемы на $\Omega \times [t_0, T]$ и таковы, что $\xi_1(\omega, t) < \xi_2(\omega, t) < \xi_3(\omega, t)$ при всех $\omega \in \Omega$, $t \in [t_0, T]$.

Рассмотрим Н.С.П. $\tilde{X}(t)$, для которого при всех $\omega \in \Omega$, $t \in [t_0, T]$ нечеткое число $\tilde{X}(\omega, t)$ имеет треугольный вид $(\xi_1(\omega, t),\ \xi_2(\omega, t),\ \xi_3(\omega, t))$, т.е. функция принадлежности $\tilde{X}(\omega,t)$ при всех $\omega\in\Omega$, $t\in[t_0,T]$ дается формулой

$$\mu_{\omega,t}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\xi_1(\omega,t)}{\xi_2(\omega,t)-\xi_1(\omega,t)}, & \text{если } x\in[\xi_1(\omega,t),\xi_2(\omega,t)];\\ \dfrac{x-\xi_3(\omega,t)}{\xi_2(\omega,t)-\xi_3(\omega,t)}, & \text{если } x\in[\xi_2(\omega,t),\xi_3(\omega,t)];\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

В этом случае α-индексы $\tilde{X}(t)$ определяются выражениями

(5) $$X_\alpha^-(t)=(1-\alpha)\xi_1(t)+\alpha\xi_2(t),\qquad X_\alpha^+(t)=(1-\alpha)\xi_3(t)+\alpha\xi_2(t).$$

Согласно (4), (5) нечеткое ожидание $M(\tilde{X}(t))$ задается формулами для α-индексов

$$[M(\tilde{X}(t))]_\alpha^-=(1-\alpha)E\xi_1(t)+\alpha E\xi_2(t)\ (\forall\,\alpha\in[0,1]),$$
$$[M(\tilde{X}(t))]_\alpha^+=(1-\alpha)E\xi_3(t)+\alpha E\xi_2(t)\ (\forall\,\alpha\in[0,1]).$$

При этом в силу (2) ожидание Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ равно

$$m(\tilde{X}(t))=\frac{1}{4}(E\xi_1(t)+2E\xi_2(t)+E\xi_3(t)).$$

Ниже рассмотрим понятие ковариационной функции Н.С.П. и ее свойства. В соответствии с (3) ковариационной функцией Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ назовем величину

(6) $$K_{\tilde{X}}(t,s)=cov(\tilde{X}(t),\tilde{X}(s))=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\Big(K_{X_\alpha^-}(t,s)+K_{X_\alpha^+}(t,s)\Big)\,d\alpha.$$

Здесь $K_{X_\alpha^-}(t,s)$ и $K_{X_\alpha^+}(t,s)$ – ковариационные функции вещественных случайных процессов $X_\alpha^-(t)$ и $X_\alpha^+(t)$, определяемые равенствами

$$K_{X_\alpha^\pm}(t,s)=E\left(X_\alpha^\pm(t)-E(X_\alpha^\pm(t))\right)\left(X_\alpha^\pm(s)-E(X_\alpha^\pm(s))\right).$$

Дисперсия Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ равна $D_{\tilde{X}}(t)=K_{\tilde{X}}(t,t)$.

Пример 2. Пусть выполнены условия примера 1 и дополнительно случайные процессы $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, а также $\xi_2(t)$, $\xi_3(t)$ попарно некоррелированны. Тогда ковариационная функция $K_{\tilde{X}}(t_1,t_2)$ Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ треугольного вида $(\xi_1(t),\ \xi_2(t),\ \xi_3(t))$ выражается через ковариационные функции $K_{\xi_1}(t_1,t_2)$, $K_{\xi_2}(t_1,t_2)$, $K_{\xi_3}(t_1,t_2)$ случайных процессов $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ и $\xi_3(t)$ формулой

$$K_{\tilde{X}}(t_1,t_2)=\frac{1}{6}\left\{K_{\xi_1}(t_1,t_2)+2K_{\xi_2}(t_1,t_2)+K_{\xi_3}(t_1,t_2)\right\}.$$

Действительно, для ковариационной функции $K_{X_\alpha^-}(t_1, t_2)$, согласно формуле (5), для левого индекса $X_\alpha^-(t)$ треугольного Н.С.П. в предположении о некоррелированности $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ получим

$$K_{X_\alpha^-}(t_1, t_2) = (1-\alpha)^2 K_{\xi_1}(t_1, t_2) + \alpha^2 K_{\xi_2}(t_1, t_2).$$

Аналогично, с учетом некоррелированности $\xi_3(t)$ и $\xi_2(t)$ имеем

$$K_{X_\alpha^+}(t_1, t_2) = (1-\alpha)^2 K_{\xi_3}(t_1, t_2) + \alpha^2 K_{\xi_2}(t_1, t_2).$$

Тогда по определению (6) ковариационной функции Н.С.П. получим высказанное утверждение.

Согласно (6) и свойствам ковариаций вещественных случайных процессов (см. [16, гл. 23]) имеет место

Утверждение 2. Ковариационная функция Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ обладает свойствами:

1. Симметричность: $K_{\tilde{X}}(t_1, t_2) = K_{\tilde{X}}(t_2, t_1)$ при $\forall\, t_1, t_2 \in [t_0, T]$.

2. Пусть $\tilde{X}(t)$ – Н.С.П., а $\varphi(t)$ – неслучайная числовая функция. Если Н.С.П. $\tilde{Y}(t) = \varphi(t)\tilde{X}(t)$, то $K_{\tilde{Y}}(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2) K_{\tilde{X}}(t_1, t_2)$ при $\varphi(t_1)\varphi(t_2) \geqslant \geqslant 0$.

3. Если $\tilde{Y}(t) = \tilde{X}(t) + \varphi(t)$, то $K_{\tilde{Y}}(t_1, t_2) = K_{\tilde{X}}(t_1, t_2)$.

4. Справедливо соотношение $|K_{\tilde{X}}(t_1, t_2)| \leqslant \sqrt{D_{\tilde{X}}(t_1) D_{\tilde{X}}(t_2)}$.

Н.С.П. $\tilde{X}(\omega, t)$ с α-интервалами $[X_\alpha^-(\omega, t), X_\alpha^+(\omega, t)]$ называют [8] непрерывным в точке t, если все его α-индексы $X_\alpha^\pm(\omega, t)$ непрерывны по t как скалярные случайные процессы в среднем квадратичном.

Н.С.П. $\tilde{X}(\omega, t)$ с α-индексами $X_\alpha^-(\omega, t)$, $X_\alpha^+(\omega, t)$ называют [8] дифференцируемым в точке t (по Сеиккала), если все его α-индексы дифференцируемы по t как скалярные случайные процессы в среднем квадратичном, а производные $\frac{\partial}{\partial t} X_\alpha^-(\omega, t)$ и $\frac{\partial}{\partial t} X_\alpha^+(\omega, t)$ являются соответственно нижним и верхним α-индексами некоторой Н.С.В., называемой производной в точке t (сравни с [19] для нечеткозначной функции). В этом случае производную по t Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ будем обозначать как $\tilde{X}'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{X}(\omega, t)$.

Обычным образом последовательно определяется понятие второй и последующих производных.

Замечание 1. В силу определения производной Н.С.П. и согласно арифметическим свойствам нечетких чисел в интервальной форме операция дифференцирования Н.С.П. – линейна, т.е. производная суммы (разности) Н.С.П. равна сумме (разности) производных, а постоянный множитель может выноситься за знак производной.

Замечание 2. Производная Н.С.В. (постоянной) совпадает с нечетким числом, левые и правые α-индексы которого равны нулю при $\forall\, \alpha \in [0, 1]$.

Имеет место теорема о нечетком ожидании производной Н.С.П.

Теорема 1. Пусть Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ дифференцируем в области $t \in (t_0, T)$. Тогда определена производная от нечеткого ожидания Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ и нечеткое ожидание производной Н.С.П. равно производной от нечеткого ожидания

$$M\tilde{X}'(t) = (M\tilde{X}(t))'. \tag{7}$$

Доказательство. По определению производной Н.С.П. и нечеткого ожидания Н.С.П. можем записать

$$[M(\tilde{X}'(t))]_\alpha^\pm = E[\tilde{X}'(t)]_\alpha^\pm = E(X_\alpha^\pm)'(t) = (EX_\alpha^\pm(t))'.$$

Последнее равенство следует из соответствующего свойства вещественных случайных процессов [6, гл. 6]. Тогда, используя определение производной нечеткозначной функции $M\tilde{X}(t)$ по Сеиккала [19], а также интервальный признак равенства нечетких чисел, получим (7).

Подчеркнем, что (7) представляет собой равенство нечеткозначных функций. Отметим, что теорема 1 несколько усиливает результат из [8].

Следствие 1. В условиях теоремы 1 имеет место утверждение для ожиданий от Н.С.П. для производных

$$m\tilde{X}'(t) = (m\tilde{X}(t))'. \tag{8}$$

Кроме того, справедливо следующее утверждение для ковариационной функции от производной Н.С.П.

Теорема 2 [8]. *Пусть определены и непрерывны по совокупности переменных t, s, α вторые производные $\dfrac{\partial^2 K_{X_\alpha^-}(t,s)}{\partial t \partial s}$ и $\dfrac{\partial^2 K_{X_\alpha^+}(t,s)}{\partial t \partial s}$ ковариационных функций α-индексов $X_\alpha^\pm(t)$ для Н.С.П. $\tilde{X}(t)$. Тогда ковариационная функция $K_{\tilde{X}'}(t,s)$ производной $\tilde{X}'(t)$ нечетко случайного процесса $\tilde{X}(t)$ задается формулой*

$$K_{\tilde{X}'}(t,s) = \frac{\partial^2 K_{\tilde{X}}(t,s)}{\partial t \partial s}. \tag{9}$$

4. Стационарные нечетко случайные процессы

Как известно, вещественный случайный процесс $\xi(t)$ с $E|\xi(t)|^2 < \infty$ при $t \in [0, \infty)$ называют стационарным в широком смысле (коротко – стационарным), если он имеет постоянное математическое ожидание $E\xi(t) = a$ и ковариационную функцию $E[\xi(t) - a][\xi(s) - a] = K_\xi(t - s)$, зависящую лишь от разности аргументов (см. [6, гл. 7; 7, гл. VII]).

Назовем Н.С.П. $\tilde{X}(t)$, $t \in [0, \infty)$ стационарным, если его α-индексы при $\forall\, \alpha \in [0,1]$ являются вещественными стационарными случайными процессами.

Пример 3. Пусть выполнены условия примера 2 и дополнительно все случайные процессы $\xi_j(t)$ $(j = 1, 2, 3;\ t \in [0, \infty))$ являются стационарными. Тогда треугольный Н.С.П. $\tilde{X}(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$ является стационарным.

Это следует из выражений, полученных в примерах 1, 2 для нечетких ожиданий и соответственно ковариационных функций треугольного Н.С.П. $\tilde{X}(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$.

Имеет место

Теорема 3. Пусть $\tilde{X}(t)$, $t \in [0, \infty)$ – стационарный Н.С.П. Тогда его нечеткое ожидание $M(\tilde{X}(t))$ и ожидание $m(\tilde{X}(t))$ постоянны, а ковариационная функция $K_{\tilde{X}}(t_1, t_2) = K_{\tilde{X}}(t_2 - t_1)$ зависит от разности аргументов $t_2 - t_1 = \tau$.

Доказательство. Пусть $\tilde{X}(t)$ – стационарный Н.С.П. Обозначим постоянные математические ожидания α-индексов $X_\alpha^\pm(t)$ Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ при $\forall\, \alpha \in [0, 1]$ через $m_\alpha^\pm$. Согласно определению (3) они являются α-индексами нечеткого ожидания $M_\alpha^\pm = m_\alpha^\pm$. Тогда нечеткое ожидание $M(\tilde{X}(t))$ постоянно и ожидание $m(\tilde{X}(t)) = \frac{1}{2}\int_0^1 (m_\alpha^+ + m_\alpha^-)d\alpha$ – также постоянно.

Обозначим ковариационные функции α-индексов, т.е. вещественных случайных процессов $X_\alpha^\pm(t)$ через $K_{X_\alpha^\pm}(t_1, t_2)$. По предположению $X_\alpha^\pm(t)$ – стационарный случайный процесс, следовательно, $K_{X_\alpha^\pm}(t_1, t_2) = K_{X_\alpha^\pm}(t_2 - t_1)$. Тогда согласно определению (6) и ковариационная функция $K_{\tilde{X}}(t_1, t_2)$ Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ зависит от разности аргументов $t_2 - t_1 = \tau$.

Кроме того, справедлива

Теорема 4. Ковариационная функция $K_{\tilde{X}}(\tau)$ стационарного Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ обладает свойствами:

1. Ковариационная функция является четной, т.е. $K_{\tilde{X}}(\tau) = K_{\tilde{X}}(-\tau)$.

2. Дисперсия стационарного Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ постоянна и равна $D_{\tilde{X}} = K_{\tilde{X}}(0)$.

3. Справедливо неравенство $|K_{\tilde{X}}(\tau)| \leqslant K_{\tilde{X}}(0)$ $(\forall\, \tau \in R)$.

Теорема 4 следует из выполнения соответствующих свойств для ковариационных функций α-индексов $K_{X_\alpha^-}(\tau)$, $K_{X_\alpha^+}(\tau)$ (см. [16, гл. 24]) и представления (6).

Для стационарных Н.С.П. имеет место следующее уточнение теоремы 2.

Теорема 5. В условиях теоремы 2 ковариационная функция производной $\tilde{X}'(t)$ дифференцируемого стационарного Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ равна второй производной от его ковариационной функции, взятой со знаком минус: $K_{\tilde{X}'}(\tau) = -K''_{\tilde{X}}(\tau)$.

Доказательство. Согласно формуле (9) для $\forall\, t_1, t_2 \in [0, \infty)$ имеем

$$K_{\tilde{X}'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_{\tilde{X}}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}.$$

По условию $\tilde{X}(t)$ – стационарный Н.С.П. Тогда по теореме 3 его ковариационная функция зависит от разности аргументов $K_{\tilde{X}}(t_1, t_2) = K_{\tilde{X}}(\tau)$ при $\tau = t_2 - t_1$. Следовательно,

$$K_{\tilde{X}'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_{\tilde{X}}(\tau)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial K_{\tilde{X}}(\tau)}{\partial t_2}\right) = \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial K_{\tilde{X}}(\tau)}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t_2}\right) =$$
$$= \frac{d^2 K_{\tilde{X}}(\tau)}{d\tau^2}\frac{\partial \tau}{\partial t_1} = K''_{\tilde{X}}(\tau)(-1) = -K''_{\tilde{X}}(\tau).$$

Здесь были учтены равенства $\frac{\partial \tau}{\partial t_1} = -1$ и $\frac{\partial \tau}{\partial t_2} = 1$. Таким образом, ковариационная функция Н.С.П. $\tilde{X}'(t)$ зависит только от разности аргументов и выполнено утверждение теоремы.

Утверждение 3. Производная $\tilde{X}'(t)$ стационарного дифференцируемого Н.С.П. $\tilde{X}(t)$, $t \in [0, \infty)$ является стационарным Н.С.П.

Действительно, по условию α-индексы $X_\alpha^\pm(t)$, $t \in [0, \infty)$ Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ при $\forall\, \alpha \in [0, 1]$ являются вещественными стационарными случайными процессами. Тогда в силу известного свойства вещественных стационарных процессов [6, гл. 7] и их производные $(X_\alpha^\pm)'(t)$ являются таковыми. Поэтому утверждение 3 вытекает из определения дифференцируемости Н.С.П.

Утверждение 4. Пусть $\tilde{Y}(t)$, $t \in [0, \infty)$ – стационарный k раз дифференцируемый на $(0, \infty)$ Н.С.П., а заданные постоянные $b_s \geqslant 0$ $(s = 0, 1, \ldots$ $\ldots, k)$ не все равные нулю. Тогда линейная комбинация производных $\tilde{Z}(t) =$ $= \sum_{s=0}^k b_s \tilde{Y}^{(s)}(t)$ является стационарным Н.С.П.

Действительно, в условиях утверждения 4 левый и правый индексы $Z_\alpha^\pm(t)$ Н.С.П. $\tilde{Z}(t)$ при $\forall\, \alpha \in [0, 1]$ имеют вид

$$Z_\alpha^\pm(t) = \left[\sum_{s=0}^k b_s (\tilde{Y})^{(s)}(t)\right]_\alpha^\pm = \sum_{s=0}^k b_s (Y_\alpha^\pm(t))^{(s)}.$$

Здесь были учены определение производных Н.С.П. и свойства арифметических операций с нечеткими числами в интервальной форме.

Поскольку $Y_\alpha^\pm(t)$ – стационарные вещественные процессы, то в силу известного результата для таких процессов [6, гл. 7] получим, что $Z_\alpha^\pm(t)$ – стационарные вещественные случайные процессы. Отсюда следует утверждение 4.

5. Спектральная плотность стационарного Н.С.П. Обобщенная теорема Винера–Хинчина

Рассмотрим задачу о спектральном представлении ковариационной функции стационарного Н.С.П.

Как известно, для вещественного стационарного случайного процесса $\xi(t)$, определенного на бесконечном интервале времени $[0, \infty)$, имеет место [6, гл. 7; 7, гл. VII].

Лемма 1 (теорема Винера–Хинчина). *Ковариационная функция $K_\xi(\tau)$ и спектральная плотность $S_\xi(\tau)$ вещественного стационарного случайного процесса $\xi(t)$ связаны между собой взаимно обратными косинус-преобразованиями Фурье*

$$K_\xi(\tau)=\int\limits_0^\infty S_\xi(\omega)\cos\omega\tau d\omega,\quad S_\xi(\omega)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty K_\xi(\tau)\cos\omega\tau d\tau. \tag{10}$$

Замечание 3 [7, гл. VII.] Существование спектральной плотности $S_\xi(\omega)$ вещественного стационарного случайного процесса $\xi(t)$ и выполнение соотношений (10) обеспечивается, например, непрерывностью ковариационной функции $K_\xi(\tau)$ процесса $\xi(t)$ и ее суммируемостью на $(0,\infty)$ (т.е. $\int_0^\infty |K_\xi(\tau)|d\tau<\infty$).

Приведем обобщение леммы 1 на случай стационарных Н.С.П. Пусть стационарный Н.С.П. $\tilde{X}(t)$, заданный на $[0,\infty)$, имеет α-индексы $X_\alpha^\pm(t)$ и пусть $S_{X_\alpha^\pm}(\omega)$ – спектральные плотности стационарных случайных процессов $X_\alpha^\pm(t)$ $(\forall\,\alpha\in[0,1])$, причем функции $S_{X_\alpha^\pm}(\omega)$ суммируемы по α на $[0,1]$. Спектральной плотностью стационарного Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ назовем функцию

$$S_{\tilde{X}}(\omega)=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\Big(S_{X_\alpha^+}(\omega)+S_{X_\alpha^-}(\omega)\Big)\,d\alpha. \tag{11}$$

Пример 4. Пусть выполнены условия примера 3. Обозначим через $S_{\xi_i}(\omega)$ спектральные плотности вещественных стационарных случайных процессов $\xi_i(t)$ $(i=1,2,3)$. Тогда спектральная плотность стационарного Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ треугольного вида $(\xi_1(t),\xi_2(t),\xi_3(t))$ описывается формулой

$$S_{\tilde{X}}(\omega)=\frac{1}{6}\left(S_{\xi_1}(\omega)+2S_{\xi_2}(\omega)+S_{\xi_3}(\omega)\right).$$

Действительно, обозначим ковариационные функции вещественных случайных процессов $\xi_i(t)$ через $K_{\xi_i}(\tau)$. Согласно (5) и в силу предположения о попарной некоррелированности случайных процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, а также $\xi_2(t)$ и $\xi_3(t)$ для ковариационных функций α-индексов $X_\alpha^\pm(t)$ Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ можем записать

$$K_{X_\alpha^-}(\tau)=(1-\alpha)^2K_{\xi_1}(\tau)+\alpha^2K_{\xi_2}(\tau),$$
$$K_{X_\alpha^+}(\tau)=(1-\alpha)^2K_{\xi_3}(\tau)+\alpha^2K_{\xi_2}(\tau).$$

Тогда на основании формул (10) для спектральных плотностей вещественных стационарных случайных процессов $X_\alpha^\pm$ получим

$$S_{X_\alpha^-}(\omega)=(1-\alpha)^2S_{\xi_1}(\omega)+\alpha^2S_{\xi_2}(\omega),$$
$$S_{X_\alpha^+}(\omega)=(1-\alpha)^2S_{\xi_3}(\omega)+\alpha^2S_{\xi_2}(\omega).$$

Поэтому в соответствии с (11) спектральная плотность Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ треугольного вида $(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$ характеризуется формулой

$$S_{\tilde{X}}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 (1-\alpha)^2 d\alpha S_{\xi_1}(\omega) + \int\limits_0^1 \alpha^2 d\alpha S_{\xi_2}(\omega) + \int\limits_0^1 (1-\alpha)^2 d\alpha S_{\xi_3}(\omega) + \right.$$
$$\left. + \int\limits_0^1 \alpha^2 d\alpha S_{\xi_2}(\omega)\right) = \frac{1}{6}\left(S_{\xi_1}(\omega) + 2S_{\xi_2}(\omega) + S_{\xi_3}(\omega)\right),$$

которая влечет утверждение 4.

Отметим, что по определению (11) и в силу свойств спектральных плотностей вещественных стационарных случайных процессов (см. [16, гл. 24]) справедливо

Утверждение 5. Выполнены следующие свойства спектральной плотности стационарного Н.С.П.:

1. Спектральная плотность стационарного Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ неотрицательна, т.е. $S_{\tilde{X}}(\omega) \geqslant 0$.

2. Интеграл от спектральной плотности стационарного Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ в пределах от нуля до бесконечности равен дисперсии Н.С.П. $\tilde{X}(t)$, т.е. $\int_0^\infty S_{\tilde{X}}(\omega) d\omega = D_{\tilde{X}}$.

Целесообразность данного выше определения (11) подтверждается установленной ниже обобщенной теоремой Винера–Хинчина.

Теорема 6. Пусть $\tilde{X}(t)$, $t \in [0,\infty)$ – стационарный Н.С.П. и для его α-индексов $X_\alpha^{\pm}(t)$ при любом $\alpha \in [0,1]$ определены ковариационная функция $K_{X_\alpha^{\pm}}(\tau)$ и спектральная плотность $S_{X_\alpha^{\pm}}(\omega)$, причем они суммируемы по совокупности переменных на $[0,\infty) \times [0,1]$. Тогда ковариационная функция и спектральная плотность стационарного Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ связаны между собой взаимно обратными косинус-преобразованиями Фурье:

$$K_{\tilde{X}}(\tau) = \int\limits_0^\infty S_{\tilde{X}}(\omega)\cos\omega\tau d\omega, \qquad S_{\tilde{X}}(\omega) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty K_{\tilde{X}}(\tau)\cos\omega\tau d\tau. \tag{12}$$

Доказательство. Покажем первую из формул (12). Для стационарных вещественных процессов $X_\alpha^{\pm}(t)$ по лемме 1 имеем $K_{X_\alpha^-}(\tau) = \int\limits_0^\infty S_{X_\alpha^-}(\omega)\cos\omega\tau d\omega$ и $K_{X_\alpha^+}(\tau) = \int\limits_0^\infty S_{X_\alpha^+}(\omega)\cos\omega\tau d\omega$. Сложим обе части этих равенств, а затем проинтегрируем полученные результаты по α от 0 до 1. Тогда $\int\limits_0^1 (K_{X_\alpha^-}(\tau) + K_{X_\alpha^+}(\tau)) d\alpha = \int\limits_0^1\int\limits_0^\infty (S_{X_\alpha^-}(\omega) + S_{X_\alpha^+}(\omega))\cos\omega\tau d\omega d\alpha$. Меняя в правой части порядок интегрирования на основании теоремы Фубини и используя (6), (11), установим формулу для $K_{\tilde{X}}(\tau)$.

Кроме того, по лемме 1 $S_{X_\alpha^\pm}(\omega) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty K_{X_\alpha^\pm}(\tau)\cos\omega\tau d\tau$. Откуда, аналогично предыдущему, с учетом (6), (11) следует вторая из формул (12).

Пример 5. Пусть выполнены условия примера 4. Тогда в силу теоремы 6 и согласно примеру 4 ковариационная функция $K_{\tilde{X}}(t)$ треугольного стационарного нечетко случайного процесса $\tilde{X}(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$ дается формулой

$$K_{\tilde{X}}(\tau) = \frac{1}{6}\int\limits_0^\infty (S_{\xi_1}(\omega) + 2S_{\xi_2}(\omega) + S_{\xi_3}(\omega))\cos\omega\tau d\omega = \\ = \frac{1}{6}\left\{K_{\xi_1}(\tau) + 2K_{\xi_2}(\tau) + K_{\xi_3}(\tau)\right\},$$

где $K_{\xi_i}(\tau)$ – ковариационные функции вещественных стационарных случайных процессов $\xi_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$.

Отметим, что этот результат соответствует примеру 2.

6. О преобразовании стационарного Н.С.П. линейной динамической стационарной системой

Пусть на вход некоторого устройства поступает случайный сигнал $\xi(t)$, а на выходе наблюдается случайный сигнал $\eta(t)$. Устройство называется стационарной линейной динамической системой n-го порядка, если связь выхода $\eta(t)$ со входом $\xi(t)$ описывается линейным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами вида

$$(13)\quad a_n\eta^{(n)}(t) + a_{n-1}\eta^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\eta'(t) + a_0\eta(t) = \\ = b_k\xi^{(k)}(t) + b_{k-1}\xi^{(k-1)}(t) + \cdots + b_1\xi'(t) + b_0\xi(t) \quad (t > 0).$$

Здесь a_j $(j = 0, 1, \ldots, n)$ и b_s $(s = 0, 1, \ldots, k)$ – вещественные числа, причем $k < n$.

Если динамическая система (13) асимптотически устойчива, а на ее вход поступает вещественный стационарный случайный процесс $\xi(t)$, то при достаточно больших значениях t, т.е. по окончании некоторого переходного периода, случайный процесс $\eta(t)$ на выходе можно считать стационарным. В литературе широко известна задача (см. [6, гл. 7]) об установлении связи между числовыми характеристиками (математическими ожиданиями и соответственно ковариационными функциями) входного и выходного вещественных стационарных случайных сигналов динамической системы (13).

Ниже предполагается, что на вход динамической системы (13) поступает стационарный Н.С.П. $\tilde{Y}(t)$, а на выходе наблюдается стационарный Н.С.П. $\tilde{X}(t)$.

Требуется по известным характеристикам стационарного Н.С.П. $\tilde{Y}(t)$ на входе вычислить характеристики стационарного Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ на выходе динамической системы (13).

Рассмотрим задачу о вычислении постоянного нечеткого ожидания $M\tilde{X}$ (и ожидания $m\tilde{X}$) на выходе системы (13) по известному постоянному нечеткому ожиданию $M\tilde{Y}$ (либо ожиданию $m\tilde{Y}$) на входе.

Утверждение 6. *Пусть на вход динамической системы* (13) *поступает стационарный непрерывно дифференцируемый k раз Н.С.П. $\tilde{Y}(t)$, $t \in [0, \infty)$, а на выходе наблюдается стационарный непрерывно дифференцируемый n раз Н.С.П. $\tilde{X}(t)$, $t \in [0, \infty)$. Тогда справедливы соотношения*

$$M\tilde{X} = \frac{b_0}{a_0} M\tilde{Y}, \qquad m\tilde{X} = \frac{b_0}{a_0} m\tilde{Y}.$$

Действительно, по условию имеет место следующее равенство:

$$(14) \quad a_n \tilde{X}^{(n)}(t) + a_{n-1}\tilde{X}^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \tilde{X}'(t) + a_0 \tilde{X}(t) = \\ = b_k \tilde{Y}^{(k)}(t) + b_{k-1}\tilde{Y}^{(k-1)}(t) + \cdots + b_1 \tilde{Y}'(t) + b_0 \tilde{Y}(t) \ (t > 0).$$

Приравняем нечеткое ожидание левой и правой частей равенства (14). Тогда, используя алгебраические свойства нечетких ожиданий (утверждение 1) и свойства производной от нечеткого ожидания (теорема 1), получим

$$(15) \quad a_n (M\tilde{X})^{(n)}(t) + a_{n-1}(M\tilde{X})^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 (M\tilde{X})'(t) + a_0 M\tilde{X}(t) = \\ = b_k (M\tilde{Y})^{(k)}(t) + b_{k-1}(M\tilde{Y})^{(k-1)}(t) + \cdots + b_1 (M\tilde{Y})'(t) + b_0 M\tilde{Y}(t).$$

Так как нечеткие ожидания стационарных Н.С.П. $\tilde{Y}(t)$ и $\tilde{X}(t)$ постоянны, то в соответствии с замечанием 2 их производные любого порядка равны нечеткому числу, все левые и правые индексы которого равны нулю. Тогда (15) влечет равенство

$$a_0 M\tilde{X} = b_0 M\tilde{Y},$$

откуда $M\tilde{X} = \frac{b_0}{a_0} M\tilde{Y}$. Аналогично для ожиданий $m\tilde{X} = \frac{b_0}{a_0} m\tilde{Y}$.

Далее по известной ковариационной функции $K_{\tilde{Y}}(\tau)$ стационарного Н.С.П. $\tilde{Y}(t)$ на входе динамической системы (14) найдем ковариационную функцию $K_{\tilde{X}}(\tau)$ и дисперсию $D_{\tilde{X}}$ стационарного Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ на выходе.

Имеет место

Теорема 7. *Пусть коэффициенты динамической системы* (14) *неотрицательны, т. е. $a_j \geqslant 0$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$, $b_s \geqslant 0$ $(s = 0, 1, \ldots, k)$. Пусть на вход динамической системы* (14) *поступает непрерывно дифференцируемый k раз Н.С.П. $\tilde{Y}(t)$, $t \in [0, \infty)$, причем для α-индексов $Y_\alpha^{\pm}(t)$ Н.С.П. $\tilde{Y}(t)$ при любом $\alpha \in [0, 1]$ определены ковариационные функции $K_{Y_\alpha^{\pm}}(\tau)$ и спектральные плотности $S_{Y_\alpha^{\pm}}(\omega)$, суммируемые по совокупности переменных на $[0, \infty) \times [0, 1]$.*

Пусть на выходе динамической системы (14) *наблюдается непрерывно дифференцируемый n раз Н.С.П. $\tilde{X}(t)$, $t \in [0, \infty)$. Тогда алгоритм вычислений (в действительной форме) ковариационной функции $K_{\tilde{X}}(\tau)$ стационарного Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ на выходе динамической системы* (14) *состоит из следующих этапов:*

1) по ковариационной функции $K_{\tilde{Y}}(\tau)$ стационарного Н.С.П. $\tilde{Y}(t)$ на входе динамической системы (14) *вычислим его спектральную плотность $S_{\tilde{Y}}(\omega)$ по обобщенной формуле Винера–Хинчина* (12)

$$S_{\tilde{Y}}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_{\tilde{Y}}(\tau) \cos \omega\tau d\tau; \tag{16}$$

2) по данному дифференциальному уравнению (14) *найдем частотную характеристику $\Phi(i\omega)$:*

$$\Phi(i\omega) = \frac{b_k(i\omega)^k + \cdots + b_1(i\omega) + b_0}{a_n(i\omega)^n + \cdots + a_1(i\omega) + a_0}, \tag{17}$$

где i – мнимая единица;

3) по спектральной плотности $S_{\tilde{Y}}(\omega)$ на входе системы (16) *и квадрату модуля частотной характеристики* (17) $|\Phi(i\omega)|^2$ *найдем спектральную плотность $S_{\tilde{X}}(\omega)$ стационарного Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ на выходе системы:*

$$S_{\tilde{X}}(\omega) = |\Phi(i\omega)|^2 S_{\tilde{Y}}(\omega); \tag{18}$$

4) по спектральной плотности $S_{\tilde{X}}(\omega)$ (18) *на выходе системы вычислим ковариационную функцию $K_{\tilde{X}}(\tau)$ и (или) дисперсию $D_{\tilde{X}}$ стационарного Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ на выходе системы согласно обобщенной формуле Винера–Хинчина* (12)*:*

$$K_{\tilde{X}}(\tau) = \int_0^\infty S_{\tilde{X}}(\omega) \cos \omega\tau d\omega, \qquad D_{\tilde{X}} = \int_0^\infty S_{\tilde{X}}(\omega) d\omega. \tag{19}$$

Доказательство. Для α-индексов $X_\alpha^\pm(t)$ и $Y_\alpha^\pm(t)$ Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ и $\tilde{Y}(t)$ в силу уравнения (14) для $\forall\, \alpha \in [0, 1]$ согласно определению производных Н.С.П. и на основании предположения о положительности числовых коэффициентов a_k, b_s, а также определения сложения нечетких чисел в интервальном виде, имеем

$$\begin{gathered} a_n (X_\alpha^\pm)^{(n)}(t) + a_{n-1} (X_\alpha^\pm)^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 (X_\alpha^\pm)'(t) + a_0 X_\alpha^\pm(t) = \\ = b_k (Y_\alpha^\pm)^{(k)}(t) + b_{k-1} (Y_\alpha^\pm)^{(k-1)}(t) + \cdots + b_1 (Y_\alpha^\pm)'(t) + b_0 Y_\alpha^\pm(t) \quad (t > 0). \end{gathered} \tag{20}$$

По условию теоремы α-индексы $Y_\alpha^\pm(t)$ и $X_\alpha^\pm(t)$ являются вещественными стационарными случайными процессами при $t \in [0, \infty)$. Далее для каждой пары вещественных стационарных случайных процессов $Y_\alpha^\pm(t)$ и $X_\alpha^\pm(t)$, связанных между собой динамической системой (20), применяется известный алгоритм вычислений (см. [6, гл. 7], состоящий из пунктов 1)–4).

А именно, сначала для любого $\alpha \in [0,1]$ по ковариационной функции $K_{Y_\alpha^\pm}(\tau)$ случайного процесса $Y_\alpha^\pm(t)$ на входе динамической системы (20) в соответствии с (10) вычисляется его спектральная плотность $S_{Y_\alpha^\pm}(\omega)$

$$S_{Y_\alpha^\pm}(\omega) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty K_{Y_\alpha^\pm}(\tau)\cos\omega\tau d\tau.$$

Затем, используя частотную характеристику $\Phi(i\omega)$, определяются спектральные плотности стационарных вещественных случайных процессов $X_\alpha^\pm(t)$ на выходе по формулам

$$S_{X_\alpha^\pm}(\omega) = |\Phi(i\omega)|^2 S_{Y_\alpha^\pm}(\omega).$$

Отсюда, в силу (11), следует (18).

Далее находятся ковариационные функции

$$K_{X_\alpha^\pm}(\tau) = \int\limits_0^\infty S_{X_\alpha^\pm}(\omega)\cos\omega\tau d\omega$$

вещественных стационарных случайных процессов $X_\alpha^\pm(t)$ на выходе динамической системы (20).

После этого применяются данные выше определения ковариационной функции (6) и спектральной плотности (11) стационарных Н.С.П.

$$K_{\tilde{X}}(\tau) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (K_{X_\alpha^-}(\tau) + K_{X_\alpha^+}(\tau))d\alpha =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^\infty (S_{X_\alpha^+}(\omega) + S_{X_\alpha^-}(\omega))\cos\omega\tau d\omega\right) d\alpha.$$

Меняя здесь порядок интегрирования на основании теоремы Фубини, получим

$$K_{\tilde{X}}(\tau) = \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (S_{X_\alpha^+}(\omega) + S_{X_\alpha^-}(\omega))d\alpha\right)\cos\omega\tau d\omega = \int\limits_0^\infty S_{\tilde{X}}(\omega)\cos\omega\tau d\omega.$$

Таким образом, установлена первая из формул (19). Формула для дисперсии $D_{\tilde{X}}$ следует из установленной, поскольку $D_{\tilde{X}} = K_{\tilde{X}}(0)$.

З а м е ч а н и е 4. Уравнение (20) можно трактовать как уравнение в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ случайных величин с конечным вторым моментом. Если выполнено условие отрицательности вещественных частей всех корней характеристического уравнения $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, то уравнение (20) асимптотически устойчиво по Ляпунову в $\mathcal{H}$ (см. [21, гл. II]).

З а м е ч а н и е 5. Уравнение (15) по существу – нечетко дифференциальное уравнение. По поводу таких уравнений см. [19, 22]. Уравнение (14) представляет собой нечетко случайное уравнение. Такие уравнения рассмотрены в [23–25].

П р и м е р 6. Пусть на вход линейной динамической системы (13) поступает Н.С.П. треугольного вида $\tilde{Y}(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$, причем вещественные случайные процессы $\xi_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ удовлетворяют условиям примера 4. Тогда, согласно примеру 3, Н.С.П. $\tilde{Y}(t)$ является стационарным. При этом в силу примера 2 его ковариационная функция $K_{\tilde{Y}}(\tau)$ имеет вид

$$K_{\tilde{Y}}(\tau) = \frac{1}{6}\{K_{\xi_1}(\tau) + 2K_{\xi_2}(\tau) + K_{\xi_3}(\tau)\},$$

где $K_{\xi_i}(\tau)$ – ковариационные функции вещественных случайных процессов $\xi_i(t)$.

Кроме того, согласно примеру 4, спектральная плотность стационарного треугольного Н.С.П. $\tilde{Y}(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)) S_{\tilde{Y}}(\omega)$ на входе динамической системы (13) выражается формулой

$$S_{\tilde{Y}}(\omega) = \frac{1}{6}(S_{\xi_1}(\omega) + 2S_{\xi_2}(\omega) + S_{\xi_3}(\omega)),$$

где $S_{\xi_i}(\omega)$ – спектральные плотности вещественных случайных процессов $\xi_i(t)$.

Далее, на основании теоремы 7, определим спектральную плотность стационарного Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ на выходе динамической системы (13), равную

$$S_{\tilde{X}}(\omega) = |\Phi(i\omega)|^2 S_{\tilde{Y}}(\omega) = \frac{1}{6}|\Phi(i\omega)|^2\{S_{\xi_1}(\omega) + 2S_{\xi_2}(\omega) + S_{\xi_3}(\omega)\},$$

где $\Phi(i\omega)$ – частотная характеристика системы (13). Тогда по теореме 7 ковариационная функция $K_{\tilde{X}}(\tau)$ Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ на выходе динамической системы имеет вид

$$K_{\tilde{X}}(\tau) = \frac{1}{6}\int_0^\infty |\Phi(i\omega)|^2 (S_{\xi_1}(\omega) + 2S_{\xi_2}(\omega) + S_{\xi_3}(\omega)) \cos\omega\tau d\omega.$$

7. Заключение

Существенное содержание и научную новизну данной работы составляют теоремы 3–7, а также утверждения 3–6. Подчеркнем значимость введенного в данной статье понятия спектральной плотности стационарного Н.С.П. (теорема 6), а также алгоритма определения ковариационной функции стационарного Н.С.П. на выходе динамической системы по ковариационной функции стационарного Н.С.П. на входе (теорема 7). Примеры 1–6 показывают возможность применения развитой теории к треугольным Н.С.П.

Результаты настоящей работы допускают развитие в следующих направлениях:

1. Они сохраняют силу, если вместо определения (3) ковариации нечетко случайных величин использовать определение ковариации из [5].

2. Как известно [7], теорема Винера–Хинчина для числовых случайных процессов (лемма 1) допускает запись в более общем виде, когда рассматривается не функция спектральной плотности, а функция спектрального распределения и вместо интеграла Римана используется интеграл Римана–Стилтьеса.

Обобщенная теорема Винера–Хинчина (теорема 6) допускает развитие в этом направлении для стационарных нечетко случайных процессов.

3. Возможно обобщение некоторых результатов настоящей работы на случай использования обобщенных нечетких чисел (см. [26]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аверкин А.Н.* Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. М.: Наука, 1986. 312 с.
2. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление. М.: БИНОМ, 2015. 798 с.
3. *Puri M.L., Ralescu D.A.* Fuzzy random variables // J. Math. Anal. Appl. 1978. V. 64. P. 409–422.
4. *Feng Y., Hu. L., Shu H.* The variance and covariance of fuzzy random variables // Fuzzy Sets Syst. 2001. V. 120, I. 2. P. 487–497. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(99)00060-3
5. *Шведов А.С.* Оценивание средних и ковариаций нечетко случайных величин // Прикладная эконометрика. 2016. № 42. С. 121–138.
6. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и их инженерные приложения. М.: Кнорус, 2016. 439 с.
7. *Булинский А.В., Ширяев А.Н.* Теория случайных процессов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 400 с.
8. *Хацкевич В.Л.* О непрерывных случайных процессах с нечеткими состояниями // А и Т. 2023. № 7. С. 23–40.
9. *Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов И.А.* Марковские процессы с нечеткими состояниями // Информационные технологии. 2020. Т. 26. № 6. С. 323–334.
10. *Вилков В.Б., Кальницкий В.С., Молоков И.Е.* Нечеткие системы массового обслуживания: монография. СПб.: Астерион, 2022. 184 с.
11. *Zaki N.H.M., Saliman A.N., Abdullah N.A., et. al.* Comparison of Queuing Performance Using Queuing Theory Model and Fuzzy Queuing Model at Check-in Counter in Airport // Math. Stat. 2019. No. 7(4A). P. 17–23. https://doi.org/10.13189/ms.2019.070703

12. *Usha Prameela K., Wurmbrand R., Jayakar R.P.S.* An Interpretation of Non-Preemptive Priority Fuzzy Queuing Model with Asymmetrical Service Rates // Pak. J. Stat. Oper. Res. 2021. V. 17. No. 4. P. 791–797. https://doi.org/10.18187/pjsor.v17i4.3878
13. *Liu Y., Zhu Q., Fan X.* Event-Triggered Adaptive Fuzzy Control for Stochastic Nonlinear Time-delay Systems // Fuzzy Sets Syst. 2023. V. 452. I. C. P. 42–60. https://doi.org/10.1007/s11071-021-06633-7
14. *Shen H., Wu J., Li F., Chen X., Wang J.* Fuzzy multi-objective fault-tolerant control for nonlinear Markov jump singularly perturbed systems with persistent dwell-time switched transition probabilities // Fuzzy Sets Syst. 2023. V. 452. I. C. P. 131–148. https://doi.org/10.1016/j.fss.2022.03.020
15. *Dubois D., Prade H.* The mean value of fuzzy number // Fuzzy Sets Syst. 1987. V. 24. No. 3. P. 279–300.
16. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. шк. 2003. 479 с.
17. *Язенин А.В.* Основные понятия теории возможностей. М.: Физматлит, 2016. 144 с.
18. *Хацкевич В.Л.* О некоторых свойствах нечетких ожиданий и нелинейных нечетких ожиданий нечетко случайных величин // Известия вузов. Математика. 2022. № 11. С. 97–109. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2022-11-97-109
19. *Seikkala S.* On the fuzzy initial value problem // Fuzzy Sets Syst. 1987. V. 24. No. 3. P. 319–330.
20. *Puri M.L., Ralescu D.A.* Differential of fuzzy functions // J. Math. Anal. Appl. 1983. V. 91. No. 2. P. 552–558.
21. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в Банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 535 с.
22. *Kaleva. O.* A note on fuzzy differential equations // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 2006. Vol. 64, no. 5. P. 895–900.
23. *Feng Y.* Fuzzy stochastic differential systems // Fuzzy Sets Syst. Int. J. Inform. Sci. Engin. 2000. V. 115. No. 3. P. 351–363.
24. *Malinowski M.T.* Existence theorems for solutions to random fuzzy differential equations // Nonllin. Anal. Theor. Method. Appl. 2010. V. 73. No. 6. P. 1515–1532.
25. *Chen X., Qin X.* A new existence and uniqueness theorem for fuzzy differential equations // Int. J. Fuzzy Syst. 2013. V. 13. No. 2. P. 148–151.
26. *Shvedov A.S.* Instrumental variables estimation of fuzzy regression models // J. Intelligent and Fuzzy Systems, 2019. V. 36. No. 6. P. 5457–5462. https://doi.org/10.3233/JIFS-181327

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 01.08.2023

После доработки 01.03.2024

Принята к публикации 04.03.2024